Zu einer Spektralbetrachtung von Atkinson und Sz.-Nagy.

Von P. H. MÜLLER in Dresden.

1. In den Arbeiten [1] und [2] beweisen ATKINSON und SZ.-NAGY folgende Spektralaussage.

Es seien $V_1, \ldots, V_n$ vollstetige lineare Transformationen eines Banachraumes R (Elemente f, g; 0 Nullelement) in sich; I sei die identische Abbildung in R. Wir betrachten für komplexes λ die Gleichung

$$(I + \lambda V_1 + \cdots + \lambda^n V_n) f = 0 \tag{1}$$

und nennen die Zahl λ Eigenwert, falls (1) lösbar ist mit $f \neq 0$. Dann wird gezeigt: *die zu* (1) *gehörigen Eigenwerte λ haben keinen endlichen Häufungspunkt.*

Diese Aussage findet sich auch enthalten in Arbeiten von GOCHBERG [3] und CHARASOW [4].

Im folgenden soll hierfür ein neuer Beweis gezeigt werden, der insofern berichtenswert erscheint, als es in kurzer und einfacher Weise möglich ist, bekannte Aussagen der RIESZ'schen Theorie, die für (1) im Spezialfall $n=1$ gelten, auf unseren allgemeineren Gleichungstyp auszudehnen. Den Grundgedanken zu diesem Beweise liefert ein von WIELANDT bekanntes Vorgehen, die Eigenschaften der Tschirnhaus-Transformation zur Linearisierung der Aufgabenstellung (1) zu verwenden.

2. Zur Vorbereitung des Beweises stellen wir zunächst einige bekannte Tatsachen zusammen (vgl. hierzu z. B. [5], S. 126, 175, 316).

Wir bilden ausgehend von R den Produktraum

$$\mathfrak{R} = \underbrace{R \times R \times \cdots \times R}_{n \text{ mal}}$$

mit den Elementen $\mathfrak{f}, \mathfrak{g}$, wobei $\mathfrak{f} = \{f^1, f^2, \ldots, f^n\}$, $f^i \in R$ $(\mathfrak{0} = \{0, 0, \ldots, 0\}$ Nullelement); $\mathfrak{J}$ sei die identische Abbildung in $\mathfrak{R}$. Durch Einführung einer geeigneten Metrik kann erreicht werden, daß $\mathfrak{R}$ wieder ein Banachraum wird, der sich als die direkte Summe aus den Räumen R zusammensetzt.

Sind T_{ij} $(i, j = 1, \ldots, n)$ lineare Abbildungen von R in sich, so definieren die Relationen

$$g^i = \sum_{j=1}^{n} T_{ij} f^j \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

die lineare Abbildung

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{T} \mathfrak{f}$$

von $\mathfrak{R}$ in sich. Offenbar läßt sich $\mathfrak{T}$ in Form einer Matrix mit den Elementen T_{ij} schreiben. $\mathfrak{T}$ stellt eine beschränkte (vollstetige) Abbildung in $\mathfrak{R}$ genau dann dar, wenn alle T_{ij} beschränkt (vollstetig) in R sind.

Sind $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{T}$ zwei lineare Abbildungen in $\mathfrak{R}$, zu denen die Matrizen mit den Elementen S_{ij} bzw. T_{ij} gehören, so gehört zur Produkt-Abbildung $\mathfrak{S}\mathfrak{T}$ die Matrix mit den Elementen $(ST)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} S_{ik} T_{kj}$

3. Wir definieren nun die in $\mathfrak{R}$ beschränkte Abbildung

$$\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} O & I & O & O & \cdots & O & O \\ O & O & I & O & \cdots & O & O \\ O & O & O & I & \cdots & O & O \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ O & O & O & O & \cdots & O & I \\ -V_n & -V_{n-1} & -V_{n-2} & -V_{n-3} & \cdots & -V_2 & -V_1 \end{pmatrix};$$

dabei bedeutet O die Null-Abbildung in R.

Bildet man für eine natürliche Zahl $k \leqq n$ in der oben beschriebenen Weise $\mathfrak{B}^k$, so erkennt man leicht, daß die Elemente der k letzten Zeilen in $\mathfrak{B}^k$ vollstetig sind, so daß also $\mathfrak{B}^n$ eine in $\mathfrak{R}$ vollstetige Abbildung ist. Daraus folgt aber bekanntlich (vgl. etwa [5], S. 330), daß für $\mathfrak{B}^n$ und auch schon für $\mathfrak{B}$ selbst die Aussagen der Riesz'schen Theorie gelten.

Im besonderen besteht also das von Null verschiedene Spektrum bezüglich der Gleichung

$$(\varkappa \mathfrak{J} - \mathfrak{B}) \mathfrak{f} = \mathfrak{g} \tag{2}$$

nur aus Eigenwerten, die sich höchstens gegen Null häufen können.

Nun errechnet man aus (2) unter Beachtung der Definition von $\mathfrak{B}$ für $\mathfrak{g} = \{g^1, g^2, \ldots, g^n\}$ unmittelbar die Beziehungen

$$\varkappa f^1 - f^2 = g^1,\ \varkappa f^2 - f^3 = g^2, \ldots,\ \varkappa f^{n-1} - f^n = g^{n-1},$$
$$V_n f^1 + V_{n-1} f^2 + \cdots + V_1 f^n + \varkappa f^n = g^n;$$

d. h. aber, $\mathfrak{g}$ ist Nullvektor in $\mathfrak{R}$ genau dann, wenn

$$f^2 = \varkappa f^1,\ f^3 = \varkappa f^2 = \varkappa^2 f^1, \ldots, f^n = \varkappa^{n-1} f^1,$$
$$\varkappa^n f^1 + \varkappa^{n-1} V_1 f^1 + \cdots + \varkappa V_{n-1} f^1 + V_n f^1 = 0$$

gilt. Das bedeutet schließlich, daß $(\varkappa\mathfrak{J}-\mathfrak{B})\mathfrak{f}=0,\ \mathfrak{f}\neq 0$ äquivalent ist zu

$$\varkappa^n f^1+\varkappa^{n-1}V_1 f^1+\cdots+\varkappa V_{n-1}f^1+V_n f^1=0,\ f^1\neq 0.$$

Setzt man noch $\lambda=\frac{1}{\varkappa}$ $(\varkappa\neq 0)$, so ergibt sich der zu beweisende Satz.

Literatur.

[1] F. V. Atkinson, A spectral problem for completely continuous operators, *Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae*, 3 (1952), 53—60.

[2] B. Sz.-Nagy, On a spectral problem of Atkinson, *Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae*, 3 (1952), 61—66.

[3] И. Ц. Гохберг, О линейных операторах, аналитически зависящих от параметра, Доклады Акад. Наук СССР, **78** (1951), 629—632.

[4] Д. Ф. Харазов, К теории линейных уравнений в пространствах Банаха, Труды Тбил. Мат. Ун-та, **19** (1953), 163—171.

[5] A. C. Zaanen, *Linear Analysis* (Amsterdam, 1953).

(*Eingegangen am 1. Oktober 1956.*)